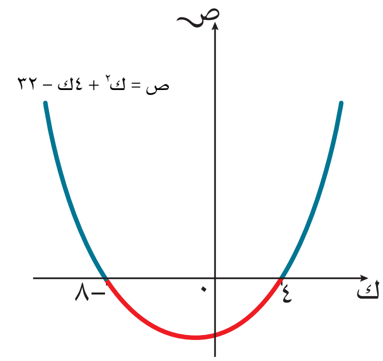
نتحقق من جانبَي القيمتَين م = −٨، م = ٤ على منحنى ص = ك^{٢} + ٤ك − ٣٢، الذي له قيمة صغرى.



نرى أن ص < ٠ في الجزء الأحمر حيث يقع المنحنى أسفل المحور ك.

مجموعة الحلول هي −٨ < ك < ٤ .

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) ٤س^{٢} + ٨ س − ٨ = ك (٤س −٣)

٤س^{٢} + ٨ س − ٨ − ٤ك س + ٣ك = ٠

٤س^{٢} + (٨ − ٤ك) س + ٣ك − ٨ = ٠

ب^{٢} − ٤ أ ج < ٠

(٨ − ٤ك)^{٢} − ٤(٤)(٣ك − ٨) < ٠

٦٤ − ٦٤ك + ١٦ك^{٢} − ٤٨ك + ١٢٨ < ٠

١٦ك^{٢} − ١١٢ك + ١٩٢ < ٠

ك^{٢} − ٧ك + ١٢ < ٠

(ك − ٣)(ك − ٤) < ٠

حلّا المعادلة ك^{٢} − ٧ك + ١٢ = ٠ هما ك = ٣، ك = ٤

على منحنى ص = ك^{٢} − ٧ك + ١٢، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص < ٠ في الجزء الذي يقع أسفل المحور ك، حيث ٣ < ك < ٤

٢) س(س + ٢) < س

س^{٢} + ٢س − س < ٠

س^{٢} + س < ٠

س(س + ١) < ٠

حلّا المعادلة س^{٢} + س = ٠ هما س = ٠، س = −١

على منحنى ص = س^{٢} + س، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص < ٠ في الجزء الذي يقع أسفل المحور السيني، حيث −١ < س < ٠

٣) (ك + ١) س^{٢} − ٣س + (ك + ١) < ٠ و ب^{٢} − ٤ أ ج < ٠

(−٣)^{٢} − ٤(ك + ١)(ك + ١) < ٠

٩ − ٤ك^{٢} − ٨ك − ٤ < ٠

٤ك^{٢} + ٨ك − ٥ > ٠

(٢ك + ٥)(٢ك − ١) > ٠

حلّا المعادلة ٤ك^{٢} + ٨ك − ٥ = ٠ هما ك = −$\frac{٥}{٢}$، ك = $\frac{١}{٢}$

على منحنى ص = ٤ك^{٢} + ٨ك − ٥، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص > ٠ في الجزأَين اللذَين يقعان أعلى المحور ك، حيث ك < −$\frac{٥}{٢}$، ك > $\frac{١}{٢}$

إلّا أنه حتى يقع ص = (ك + ١) س^{٢} − ٣س + (ك + ١) أسفل المحور السيني، وجب أن تكون ك + ١ سالبة، ما يعني أن ك < −١

∴ مجموعة الحلول هي ك < −$\frac{٥}{٢}$

٤) س^{٢} < ٦ − ٥س

س^{٢} + ٥س − ٦ < ٠

(س + ٦)(س − ١) < ٠

حلّا المعادلة س^{٢} + ٥س − ٦ = ٠ هما س = −٦، س = ١

على منحنى ص = س^{٢} + ٥س − ٦، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص < ٠ في الجزء الذي يقع أسفل المحور السيني، حيث −٦ < س < ١.

٥) س(٢س + ك) = ك − ٦س

٢س^{٢} + ك س + ٦س − ك = ٠

٢س^{٢} + (ك + ٦) س − ك = ٠

ب^{٢} − ٤ أ ج = ٠

(ك + ٦)^{٢} − ٤(٢)(−ك) = ٠

ك^{٢} + ١٢ك + ٣٦ + ٨ ك = ٠

ك^{٢} + ٢٠ك + ٣٦ = ٠

(ك + ١٨)(ك + ٢) = ٠

ك = −١٨، ك = −٢

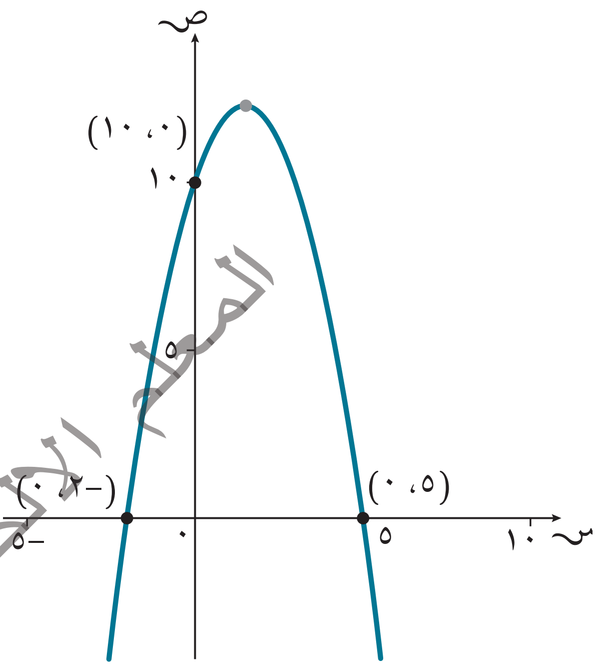
٦) أ) س = ٠ ⇐ ص = ١٠ + ٣ × ٠ − ٠^{٢} = ١٠

= (٠، ١٠) نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي

ص = ٠ ⟸ ٠ = ١٠ + ٣س − س^{٢}

س^{٢} − ٣س − ١٠ = (س − ٥) (س + ٢) = ٠

(٥، ٠)، (−٢، ٠) نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السيني



ب س = $\frac{−٢ + ٥}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

ص = ١٠ + ٣ × $\frac{٣}{٢}$ − $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٤٩}{٢}$

نقطة التحوّل $\left(\frac{٣}{٢}، \frac{٤٩}{٢}\right)$

٧) س^{٢} + ٩س + ك = ٣س + جـ

س^{٢} + ٦س + ك − جـ = ٠

ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

(٦)^{٢} − ٤(١)(ك − جـ) = ٠

٣٦ − ٤ك + ٤ جـ = ٠

ك = ٩ + جـ

٨) س^{٢} + ك س + ١١ = ٢س − ٥

س^{٢} + (ك − ٢) س + ١٦ = ٠

ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠

(ك − ٢)^{٢} − ٤(١)(١٦) > ٠

ك^{٢} − ٤ك − ٦٠ > ٠

(ك − ١٠)(ك + ٦) > ٠

حلّا المعادلة ك^{٢} − ٤ك − ٦٠ = ٠ هما ك = ١٠، ك = −٦

على منحنى ص = ك^{٢} − ٤ك − ٦٠، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص > ٠ في الجزأَين اللذَين يقعان أعلى المحور ك، حيث ك > ١٠ أو ك < −٦

٩) س^{٢} + ٨ س + ٧ = م س − ٢

س^{٢} + (٨ − م) س + ٩ = ٠

ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠

(٨ − م)^{٢} − ٤(١)(٩) > ٠

٦٤ − ١٦م + م^{٢} − ٣٦ > ٠

م^{٢} − ١٦م + ٢٨ > ٠

(م − ٢)(م − ١٤) > ٠

حلّا المعادلة م^{٢} − ١٦م + ٢٨ = ٠ هما ك = ٢، ك = ١٤

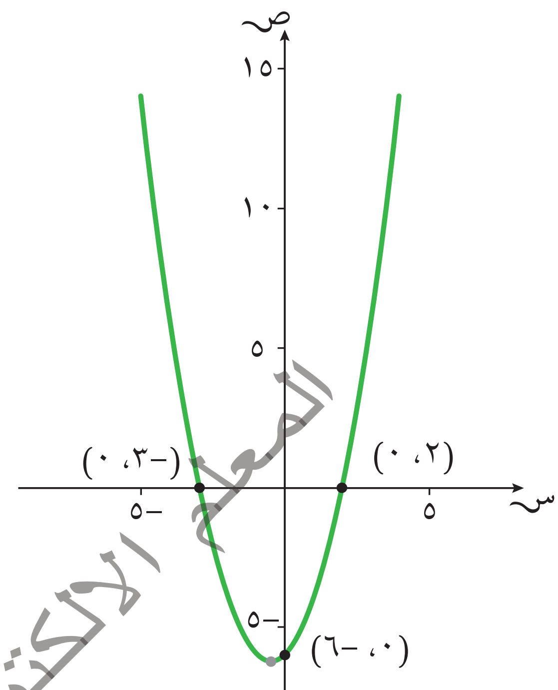
على منحنى ص = م^{٢} − ١٦م + ٢٨، الذي له قيمة صغرى، نرى أن ص > ٠ في الجزأَين اللذَين يقعان أعلى المحور م، حيث م < ٢ أو م > ١٤

١٠) **أ** س = ٠ ⟸ ص = (٠ − ٢) (٠ + ٣)

= (٠، −٦) نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الصادي

ص = ٠ ⟸ ٠ = (س − ٢) (س + ٣) ⟸ س = ٢ أو −٣

(٢، ٠)، (−٣، ٠) نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني



ب س = $\frac{-٣ + ٢}{٢} = -\frac{١}{٢}$

ص = $\left(-\frac{١}{٢} - ٢\right)\left(-\frac{١}{٢} + ٣\right) = -\frac{٥}{٢} \times \frac{٥}{٢} = -\frac{٢٥}{٤}$

نقطة التحوّل هي نقطة قيمة صغرى إحداثياتها

$\left(-\frac{١}{٢}، -\frac{٢٥}{٤}\right)$

ج (س − ٢) (س + ٣) = ك

س^{٢} + س − ٦ = ك

س^{٢} + س − ٦ − ك = ٠

ب^{٢} − ٤أ جـ = ١^{٢} − ٤ × ١ × (−٦ − ك) > ٠

١ + ٢٤ + ٤ك = ٤ك + ٢٥ > ٠

٤ك > −٢٥

ك > $-\frac{٢٥}{٤}$

١١) **أ** ص = ٢س^{٢} − ٣س + ك

−٧ = ٢ (٤)^{٢} − ٣ (٤) + ك

−٧ = ٣٢ − ١٢ + ك

ك = −٢٧

ب ٢س^{٢} − ٣س + ك = ٠

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

(−٣)^{٢} − ٤(٢)(ك) = ٠

٩ − ٨ك = ٠

ك = $\frac{٩}{٨}$

١٢) ك س^{٢} + ك = ٨ س − ٢س ك

ك س^{٢} + (٢ ك − ٨) س + ك = ٠

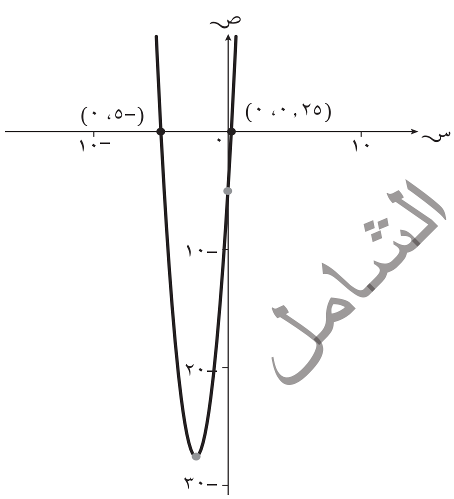
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(٢ك − ٨)^{٢} − ٤(ك)(ك) > ٠

٤ك^{٢} − ٣٢ ك + ٦٤ − ٤ك^{٢} > ٠

∴ ك < ٢

١٣) **أ** ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ = (٤س − ١) (س + ٥) ⩽ ٠



−٥ ⩽ س ⩽ $\frac{١}{٤}$

ب ١) س = ٠ ⟸ ص = ٩ − ٨ × ٠ − ٠^{٢} = ٩

(٠، ٩) نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الصادي

ص = ٠ ⟸ ٠ = ٩ − ٨س − س^{٢}

−(س^{٢} + ٨س − ٩) = −(س + ٩) (س − ١)

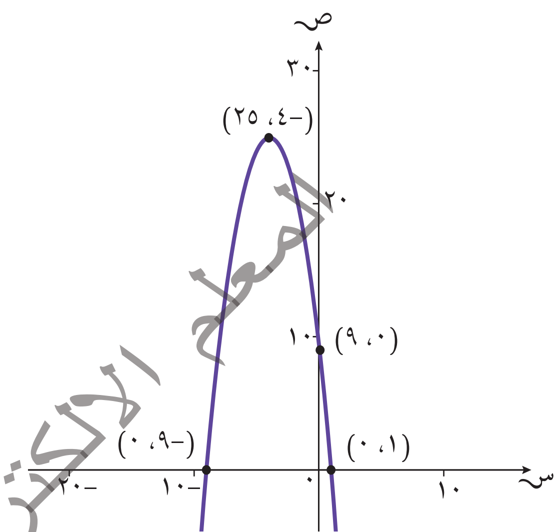
= ٠

(−٩، ٠)، (١، ٠) نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني

س = $\frac{-٩ + ١}{٢}$ = −٤

ص = ٩ − ٨ × −٤ − (−٤)^{٢} = ٢٥

نقطة التحوّل (−٤، ٢٥)



٢) القيمة العظمى تساوي ٢٥

١٤) ص = ك س − ٣ .... (١)

ص = س^{٢} − ٩س .... (٢)

عند نقاط التقاء المنحنيين، تصبح المعادلة

ك س − ٣ = س^{٢} − ٩س

نعيد ترتيبها لنحصل على:

س^{٢} − ٩س − ك س + ٣ = ٠ أو

س^{٢} − (٩ + ك) س + ٣ = ٠

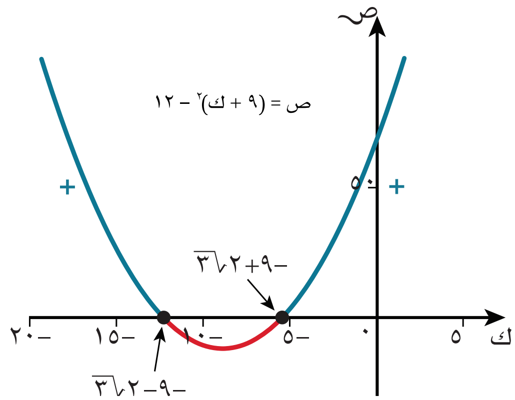
وهي في الشكل أس^{٢} + ب س + ج = ٠

حيث أ = ٢، ب = − (٩ + ك)، ج = ٣

حتى تكون نقاط التقاطع مختلفة، ب^{٢} − ٤ أ ج > ٠

∴ [− (٩ + ك)]^{٢} − ٤(١)(٣) > ٠

(٩ + ك)^{٢} - ١٢> ٠



نجد نقاط التقاطع ك من خلال حل المعادلة

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ = ٠

(٩ + ك)^{٢} = ١٢ نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة لنحصل على:

٩ + ك = ± $\sqrt{١٢}$ أو ٩ + ك = ± ٢$\sqrt{٣}$

ك = − ٩ + ٢$\sqrt{٣}$ أو ك = − ٩ − ٢$\sqrt{٣}$

نريد فترة قيم ك التي تحقق:

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ > ٠

أي القيم التي تجعل المنحنى موجبًا (أعلى المحور ك)

الحل هو ك < − ٩ − ٢$\sqrt{٣}$ أو ك > − ٩ + ٢$\sqrt{٣}$

١٥) ص = ٢س + ك .... (١)

ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} .... (٢)

عند نقاط التقاء المنحنيَين، تصح المعادلة ٢س + ك = ١ + ٢ ك س − س^{٢}

نوسّع ونعيد ترتيبها لنحصل على:

س^{٢} + ٢س − ٢ك س + ك − ١ = ٠ أو

س^{٢} + (٢ − ٢ك) س + (ك − ١) = ٠

وهي في الشكل أس^{٢} + ب س + ج = ٠

حيث أ = ١، ب = (٢ − ٢ك)، ج = ك − ١

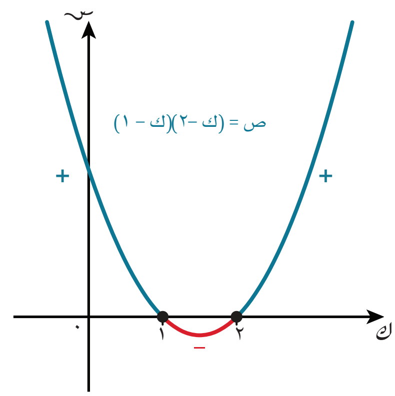
حتى تكون نقاط التقاطع مختلفة،

ب^{٢} − ٤ أ ج > ٠

∴ (٢ − ٢ ك)^{٢} − ٤(١)(ك − ١) > ٠

ونعيد ترتيبها لنحصل على:

ك^{٢} − ٣ك + ٢ > ٠ أو (ك − ٢)(ك − ١) > ٠



نجد نقاط التقاطع من خلال حل المعادلة

(ك − ٢)(ك − ١) = ٠

ك = ١ أو ك = ٢

نريد فترة قيم ك التي تحقق:

(ك − ٢)(ك − ١) > ٠

أي القيم التي تجعل المنحنى موجبًا (أعلى المحور ك)

الحل هو ك < ١ أو ك > ٢

١٦) أ ص = ٤س^{٢} − ٨ س + ٣ = ٠

(٢س − ٣) (٢س − ١) = ٠

س = $\frac{٣}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$

المقاطع من محور السينات $\left(\frac{٣}{٢}، ٠\right)$، $\left(\frac{١}{٢}، ٠\right)$

محور التماثل س = $\frac{\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}}{٢}$ = ١

عندما س = ١ فإن ص = ٤ × ١^{٢} − ٨ × ١ + ٣ = −١

وعليه، الرأس هو (١، −١)

ب ٤س^{٢} − ٨ س + ٣ = ك س + ٣

٤س^{٢} (−٨ − ك) س = ٠

المماس ⇐ ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

(−٨ − ك)^{٢} − ٤ × ٤ × ٠ = ٠

ك = −٨

١٧) ص = ٥ − ٢س + س^{٢} .... (١)

ص = ٢س + ك .... (٢)

أ عند نقاط تقاطع المنحنيَين، تصح المعادلة

٥ − ٢س + س^{٢} = ٢س + ك

نعيد ترتيبها لنحصل على:

س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠ بُيّنت

ب بما أن إحدى نقاط التقاطع هي أ = (−٢، ١٣)

∴ تعويض س = −٢ يعطينا النقطة ب.

أي (−٢)^{٢} − ٤(−٢) + (٥ − ك) = ٠

ك = ١٧

نعوض ك = ١٧ في المعادلة

س^{٢} − ٤ س + (٥ − ك) = ٠

س^{٢} − ٤ س − ١٢ = ٠

(س + ٢)(س − ٦) = ٠

س = −٢ النقطة أ، س = ٦ النقطة ب

نعوض س = ٦ في أي من المعادلتَين (١) أو (٢)

لنحصل على ص = ٢٩

النقطة ب هي عند (٦، ٢٩).

ج لدينا من الجزء أ: س^{٢} − ٤ س + (٥ − ك) = ٠

وهي في الشكل أ س^{٢} + ب س + ج = ٠

حيث أ = ١، ب = −٤، ج = ٥ − ك

حتى يكون المستقيم مماسًا للمنحنى، وجب أن يكون للمعادلة هذه حل واحد، إذًا

ب^{٢} − ٤ أ ج = ٠

(−٤)^{٢} − ٤(١)(٥ − ك) = ٠

ك = ١ ∴ س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠ نحلل إلى عوامل لنحصل على

(س − ٢)^{٢} > ٠

س = ٢

نعوض س = ٢ في أي من المعادلتَين (١) أو (٢)

لنحصل على ص = ٥

النقطة ج هي عند (٢، ٥).

١٨) **أ** عند التقاطع، يكون ص = س^{٢} − ٥س + ٧،

ص = ٢س − ٣

إذًا تصح المعادلة س^{٢} − ٥س + ٧ = ٢س − ٣

س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠

(س − ٢)(س − ٥) = ٠

س = ٢ أو س = ٥

نعوض س = ٢ في ص = ٢س − ٣ لنحصل على

ص = ١

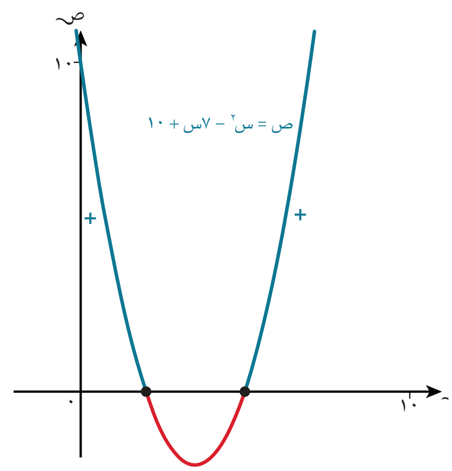
نعوض س = ٥ في ص = ٢س − ٣ لنحصل على

ص = ٧

نقطتا التقاطع هما (٢، ١)، (٥، ٧)

ب س^{٢} − ٥س + ٧ < ٢س − ٣

س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠



نجد نقاط التقاطع–س عند س = ٢، س = ٥

حتى يكون س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠، وجب أن نجد فترة قيم س حيث يكون المنحنى سالبًا (أسفل المحور السيني).

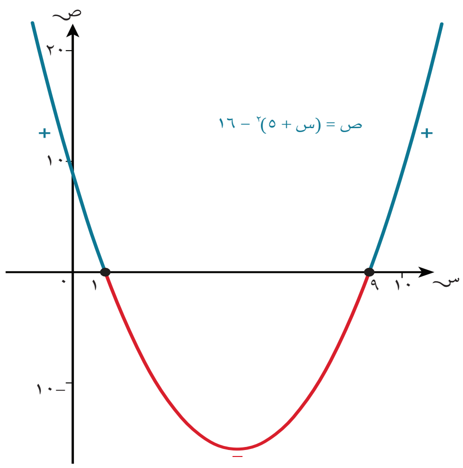
الحل هو ٢ < س < ٥

١٩) **أ** الرأس هو عند (٥، ٢٥)

ب ٢٥ − (س −٥)^{٢} $\leqslant$ ٩

(س − ٥)^{٢} − ١٦ $\geqslant$ ٠

ص = (س − ٥)^{٢} − ١٦



لنجد نقاط التقاطع، نحل (س − ٥)^{٢} − ١٦ = ٠

(س − ٥)^{٢} = ١٦ نأخذ الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة

س − ٥ = ± ٤

نقاط التقاطع هي عند س = ١، س = ٩

حتى يكون (س − ٥)^{٢} − ١٦ $\geqslant$ ٠، وجب أن نجد فترة قيم س التي تجعل المنحنى إما مساويًا للصفر أو موجبًا (أي على المحور السيني أو أعلاه)

الحل هو س $\leqslant$ ١ أو س $\geqslant$ ٩

٢٠) ٥ + ٤ن − ن^{٢} = (ن + ١) (٥ - ن)

حلل إلى العوامل العبارة التربيعية.

$\frac{-١ + ٥}{٢} = ٢$

أوجد نقطة المنتصف للجذرَين.

بعد ثانيتَين تشكّل الكرة عند أقصى ارتفاع.

ع = ٥ + ٤ × ٢ − (٢)^{٢} = ٩

عوّض في المعادلة الأصلية لتجد أقصى ارتفاع ٩ أمتار.

٩ أمتار

٢١) ٢٧ + ٣ن − ٢ن^{٢} = (٩ − ٢ن) (٣ + ن)

حلِّل إلى العوامل العبارة التربيعية.

ن = $\frac{٩}{٢}$ أو ن = −٣

$\frac{\frac{٩}{٢} + -٣}{٢} = ٠,٧٥$

يقع محور التماثل في منتصف المسافة بين الجذرَين.

ع = ٢٧ + ٣ × ٠,٧٥ − ٢ (٠,٧٥)^{٢}

أوجد قيمة ع لهذه القيمة لـ ن

ع = ٢٨,١٢٥

٢٨١٢,٥ متر

٢٢) م = ١٠س − س^{٢}

حلِّل العبارة التربيعية.

م = س (١٠ − س)

س = ٠ أو س = ١٠

أوجِد جذرَي المعادلة.

$\frac{٠ + ١٠}{٢} = ٥$

يقع محور التماثل في منتصف المسافة بين الجذرَين.

م = ١٠ × ٥ − ٥^{٢} = ٢٥

أوجِد قيمة م لهذه القيمة (لـ س)

المساحة ٢٥ م^{٢} والشكل مربع طول ضلعه ٥ م.

٢٣) ٥٦ = ١٥س − س^{٢}

شكّل المعادلة من المعلومات المعطاة في المسألة.

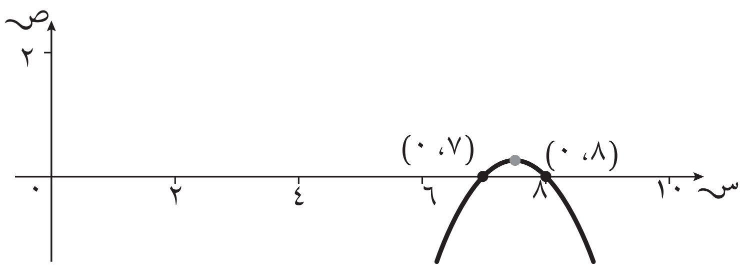
س^{٢} − ١٥س + ٥٦ = ٠

(س − ٧)(س − ٨) = ٠

حلل إلى العوامل العبارة التربيعية.

س = ٧، س = ٨

أوجد جذري المعادلة.



يمكنك رسم منحنى الدالة التربيعية، وإيجاد قيم س التي يتقاطع المنحنى عندها مع المحور س.

س = ٧، س = ٨

استخدم منحنى الدالة لتحدد قيم س المطلوبة.

يجب على الشركة تسعير المنتج بقيمة ٧٠٠ أو ٨٠٠ ريال عُماني. بالتأكيد ستختار الشركة التسعيرة الأقل لضمان بيع قطع أكثر

برّر الحلّ ليتفق مع سياق المسألة.